では、三角関数の微分の練習をしましょう。

例. 次の関数を微分せよ

(1) $y = \sin x - \tan x$ (2) $y = x - \sin x$ (3) $y = \cos^2 \frac{x}{2}$

(1) 公式をそのまま使うだけです。

$$y' = \cos x - \frac{1}{\cos^2 x}$$

(2) $y' = 1 - \cos x$

(3) $\cos^2 \frac{x}{2}$ と言えば半角の公式です。

$y = \frac{1+\cos x}{2}$ なので $y' = -\frac{\sin x}{2}$

(2) 指数関数・対数関数の導関数

鉄則

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \log a$$

$\log_e a$ のことです

鉄則

$\log_e |x|$ です

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a|x|)' = \frac{1}{x \log a}$$

しつこいですが $\log_e a$ です

これも必ず覚えましょう。ところで、$\log|x|$ の絶対値は気になりましたか?

真数条件

対数関数 $y = \log x$ の定義域は何ですか?

真数 > 0 ですね。つまり、絶対値によって $\log|x|$ の真数は正になるので、$y = \log|x|$ は、$x \neq 0$ (のすべての実数) で定義されます。

もちろん、$x > 0$ のときは $(\log x)' = \frac{1}{x}$ と表記できます。

では $x>0$ として、対数関数の導関数から証明していきましょう。

<証明>

$$(\log_a x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{h} \log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \cdot \log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

$\frac{h}{x} = k$ とおくと $k \to 0$ より

e の定義

$$\lim_{k \to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}} = e$$

$$(\log_a x)' = \lim_{k \to 0} \frac{1}{x} \log_a \underbrace{(1+k)^{\frac{1}{k}}}$$

$$= \frac{1}{x} \log_a e$$

底の変換

$$\log_a e = \frac{\log e}{\log a} = \frac{1}{\log a}$$

$$= \frac{1}{x \log a}$$

よって $a = e$ のとき $(\log x)' = \frac{1}{x}$