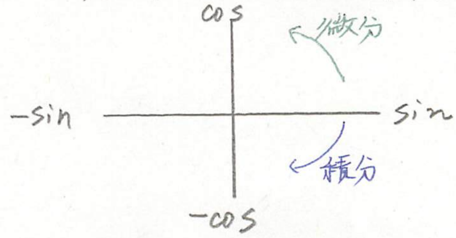
4、いろいろな関数の導関数

(1) 三角関数の導関数

公式

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

必ず覚えましょう。
覚え方は、$\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$ などを覚えたときの方法が使えます。



半時計まわりが微分です。
よって $(-\sin x)' = -\cos x$
$(-\cos x)' = \sin x$
となります。

今後は覚えて使いますが、定義は大切なので証明をしましょう。

i) $(\sin x)' = \cos x$ の証明

導関数の定義
$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cdot\cos h + \cos x\cdot\sin h - \sin x}{h}$$

加法定理
サイコ・コサイ　コサイ・サイコ
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cdot\sin h - \sin x(1-\cos h)}{h}$$

$\sin x$ でくくる

$$= \lim_{h\to 0}\cos x\cdot\underbrace{\frac{\sin h}{h}} - \sin x\cdot\underbrace{\frac{(1-\cos h)}{h}}$$

分子・分母に $\times(1+\cos h)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos^2 h}{h(1+\cos h)}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\cdot\frac{\sin h}{1+\cos h} = 1\cdot\frac{0}{1+1} = 0$$

よって、$(\sin x)' = \cos x$

ii) $(\cos x)' = -\sin x$ は i) を参考に証明してみましょう。

iii) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ の証明

加法定理
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$
イチマイタンタン　タンプラタンッ♪

$$(\tan x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan x}{h}$$

通分

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{\tan x + \tan h - \tan x(1-\tan x\cdot\tan h)}{1-\tan x\cdot\tan h}\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{\tan h(1+\tan^2 x)}{1-\tan x\cdot\tan h}$$

$$\tan h = \frac{\sin h}{\cos h}$$

$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$ は頻出です

$$= \lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{\sin h}{h}}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cos h}}\cdot\frac{1}{1-\tan x\cdot\tan h}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= 1\times 1\times\frac{1}{1-0}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$