※このページは軽く読み飛ばしてもかまいません。

3. 自然対数の底 e

オイラーの「e」です!!

(1) オイラー (Euler) の対数

e を発見したのは、スイスの天才レオンハルト・オイラーです。

オイラーは、a^x の級数展開を求めようと考えました。

つまり、$a^x = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots$ と表そう、ということです。

まず、w を「十分小さい数だが 0 ではない数」として

$$a^w = 1 + kw$$ と考えた。

$a^w \fallingdotseq a^0 = 1$ なので、a^w は 1 より少しだけ大きい(小さい)

たとえば、$a = 10$, $w = 0.000001$ とすると

$$a^w = 10^{0.000001} = 1 + k(0.000001)$$ である。

常用対数をとり、$0.000001 = \log_{10}(1 + k(0.000001))$ となり

対数表より、$k = 2.3026$ と求めることができる。

数学書巻末の対数表では精度が低くて求められません

次に、$a^x = (a^w)^{\frac{x}{w}} = (1+kw)^{\frac{x}{w}}$ として、$j = \frac{x}{w}$ として $a^x = (1 + \frac{k}{j}x)^j$

オイラーはこの式を(ニュートンの)二項定理で展開します。

$$a^x = (1 + \tfrac{k}{j}x)^j$$

$$= 1 + {}_jC_1\left(\frac{kx}{j}\right) + {}_jC_2\left(\frac{kx}{j}\right)^2 + {}_jC_3\left(\frac{kx}{j}\right)^3 + \cdots$$

$$= 1 + j\left(\frac{kx}{j}\right) + \frac{j(j-1)}{2\cdot 1}\left(\frac{kx}{j}\right)^2 + \frac{j(j-1)(j-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\left(\frac{kx}{j}\right)^3 + \cdots$$

$$= 1 + kx + \frac{j-1}{j}\left(\frac{k^2x^2}{2\cdot 1}\right) + \frac{(j-1)(j-2)}{j\cdot j}\cdot\left(\frac{k^3x^3}{3\cdot 2\cdot 1}\right) + \cdots$$

ここで、w はとても小さいので、$j = \frac{x}{w} \to \infty$ である。

よって、$\frac{j-1}{j} \to 1$, $\frac{j-2}{j} \to 1$ となるので、j を消去し

$$a^x = 1 + kx + \frac{k^2x^2}{2\cdot 1} + \frac{k^3x^3}{3\cdot 2\cdot 1} + \cdots$$ である。

↓ $x = k = 1$ を代入し、

$$a = 1 + 1 + \frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{3\cdot 2\cdot 1} + \cdots \fallingdotseq 2.718281828459 0\cdots$$

と計算した。オイラーは、この数の重要性に気づき、e とした。

つまり、$e \fallingdotseq 2.7182818284590\cdots$ という無理数である。