次は指数関数の導関数の証明です。

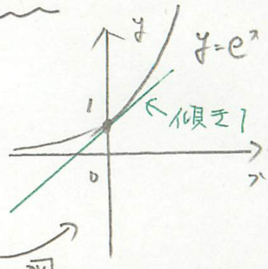
<証明>

$(e^x)' = e^x$ を示す。

$$(e^x)' = \lim_{h\to0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to0}\frac{e^x(e^h-1)}{h} = e^x\cdot\underbrace{\lim_{h\to0}\frac{e^h-e^0}{h-0}} = e^x$$

導関数の定義
$f'(x) = \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

これは、No7のeの定義②です。
eは「x=0における接線の傾きが1になる底」です。
つまり、$\lim_{h\to0}\frac{e^{0+h}-e^0}{h} = \lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h} = 1$ となります。



図

次に、$a^x = e^x \log a$ を示します。

しつこいですが、eは省略し $\log_e a = \log a$ と表します。

まず、導関数の定義から

$$(a^x)' = \lim_{h\to0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$$

a^xでくくり出す

$$= a^x\cdot\underbrace{\lim_{h\to0}\frac{a^h-1}{h}}$$ となります。

$A = a^h$ とすると、
$\log A = h\log a$
$\therefore A = e^{h\log a}\ (=a^h)$

この極限とeを関連づけるために、底をeに変換します。

$$\lim_{h\to0}\frac{a^h-1}{h} = \lim_{h\to0}\frac{e^{h\log a}-1}{h} = \underbrace{\lim_{h\to0}\frac{e^{\log a^h}-1}{\log a^h}}_{Ⓐ}\cdot\frac{\log a^h}{h}$$

ここで、Ⓐの極限を $\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t} = 1$ と関連づけるために、$\log a^h = t$ とします。
$h\to0$ のとき、$t\to0$ となるので、

$h\log a = t$ より
$h = \frac{t}{\log a}$

$$(a^x)' = a^x\cdot\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}\cdot\frac{t}{\frac{t}{\log a}}$$
$$= a^x\cdot1\cdot\log a$$
$$= a^x\cdot\log a$$

eの定義式の連発で、難しいとは思いますが、一行ずつじっくり追っていって、理解してほしいです。今後、商の微分、合成関数の微分を学ぶと、もっとスッキリと証明できます。(教科書P166)
ただ、今回は「まず、いろいろな関数の導関数を学んでから、その応用として、合成関数、積、商の微分を学ぶ」という方針でいこうと考えたため、少し複雑な証明になりました。