数学II

EX.3

(3) $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^5 = {}_5C_0(2x)^5\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^0 + {}_5C_1(2x)^4\left(-\frac{1}{x}\right)^1 + \cdots + {}_5C_5(2x)^0\left(-\frac{1}{x}\right)^5$

$$= {}_5C_0\cdot2^5\cdot(-1)^0\cdot x^5 + {}_5C_1\cdot2^4\cdot(-1)^1\cdot x^3$$
$$+\cdots+{}_5C_5\cdot2^0\cdot(-1)^5\cdot x^{-5}$$

二項定理で展開すると上記のようになる。

すべての項の係数の和を考えているので、

$${}_5C_0\cdot2^5\cdot(-1)^0 + {}_5C_1\cdot2^4\cdot(-1)^1 + \cdots + {}_5C_5\cdot2^0\cdot(-1)^5 \text{ を}$$

計算しても良いが、展開式より $x=1$ を代入してみると、

$$\left(2\cdot1-\frac{1}{1}\right)^5 = {}_5C_0\cdot2^5\cdot(-1)^0\cdot1^5 + {}_5C_1\cdot2^4\cdot(-1)^1\cdot1^3$$
$$+\cdots+{}_5C_5\cdot2^0\cdot(-1)^5\cdot1^{-5}$$

$$= {}_5C_0\cdot2^5\cdot(-1)^0 + {}_5C_1\cdot2^4\cdot(-1)^1 + \cdots + {}_5C_5\cdot2^0\cdot(-1)^5$$

が得られる。〰〰に着目すると、まさに求めたい係数の和と一致している。

これにより、今求めたい係数の和は

$${}_5C_0\cdot2^5\cdot(-1)^0 + {}_5C_1\cdot2^4\cdot(-1)^1 + \cdots + {}_5C_5\cdot2^0\cdot(-1)^5$$

$$= \left(2\cdot1-\frac{1}{1}\right)^5 = \underline{1}$$

$\left(2x-\frac{1}{x}\right)^5$ に $x=1$ を代入した結果

(補足)

今回の問題では係数の和を求めるために、$x=1$ を代入してかなり計算を簡単にしています。もちろん、普通にCの計算をして求めるよりかは計算は楽です。しかし、この方法を思いつかない場合も出てきます。その場合は素直にCの計算をした方が良いでしょう。解答にある解き方だけが全てではないので、思いつかないからといってダメではなく学び、次に活かしてください。