数学II

EX.3

(2)

"C"が入った証明では二項定理を用いることが多いです。

今回の問題では、左辺にCが入っているので、右辺の $n\cdot 2^{n-1}$ に対して二項定理を用いようと考えます。

$2^{n-1}=(1+1)^{n-1}={}_{n-1}C_0+{}_{n-1}C_1+\cdots+{}_{n-1}C_{n-2}+{}_{n-1}C_{n-1}$ から、

この変形はよく使います。

$n\cdot 2^{n-1}=n({}_{n-1}C_0+{}_{n-1}C_1+\cdots+{}_{n-1}C_{n-1})=n{}_{n-1}C_0+n{}_{n-1}C_1+\cdots+n{}_{n-1}C_{n-1}$

これで右辺が二項定理を用いて展開できました。

等式が成り立つことを言うためには、左辺と右辺を比べて

${}_nC_1=n{}_{n-1}C_0$, $2{}_nC_2=n{}_{n-1}C_1$, …… , $n{}_nC_n=n{}_{n-1}C_{n-1}$ が成り立てば良い。

これを一般的に表すと、$\boxed{k{}_nC_k=n{}_{n-1}C_{k-1}}$ を示せば良いことになる。

上記の式が成り立つためには、変化している部分と変化していない部分に着目する。変化する部分はkで表し、変化しない部分はnで表している。

$k{}_nC_k=k\cdot\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=\dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!}=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$

約分

nだけ出す。

階乗からCに戻すために表している。

$=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!\{(n-1)-(k-1)\}!}=n{}_{n-1}C_{k-1}$

$${}_nC_r=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$${}_nP_r=\frac{n!}{(n-k)!}$$

この変換が覚えられない場合は具体的な値を代入して求めましょう。

例 ${}_5C_2=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=\dfrac{5\cdot4\cdot\boxed{3\cdot2\cdot1}}{2\cdot1\cdot\boxed{3\cdot2\cdot1}}=\dfrac{5!}{2!\ 3!}=\dfrac{5!}{2!(5-2)!}$

無理矢理つけたす

これらより、

(左辺) $={}_nC_1+2{}_nC_2+\cdots\cdots+n{}_nC_n$

(右辺) $=n{}_{n-1}C_0+n{}_{n-1}C_1+\cdots\cdots+n{}_{n-1}C_{n-1}$

かつ $k{}_nC_k=n{}_{n-1}C_{k-1}$ より

(2)が証明される。