数学II

EX. 6　二項定理を用いて展開してみると、

$$(x+5)^{80} = {}_{80}C_0\, x^{80}\cdot 5^0 + {}_{80}C_1\, x^{79}\, 5^1 + \cdots + \underline{{}_{80}C_{80-k}\, x^k\cdot 5^{80-k}}$$

x^kの項を考えたい。

$$+\cdots + {}_{80}C_{80}\, x^0\cdot 5^{80}$$

ここで x^k の係数を a_k とおく。a_{k+1} と a_k の大小比較を行う。

理由

例 $a_3 < a_4$ つまり $\frac{a_4}{a_3} > 1$ と分かると、a_4がa_3よりも大きいと分かり、

$a_4 > a_5$ つまり $\frac{a_5}{a_4} < 1$ と分かると、a_4がa_5よりも大きいと分かる。

これらの情報から、$a_1 < a_2 < a_3 < a_4$, $a_4 > a_5 > \cdots$ となるので、

a_4が最大であることが分かる。

$a_k = {}_{80}C_{80-k}\cdot 5^{80-k}$ とおくと、$a_{k+1} = {}_{80}C_{79-k}\cdot 5^{79-k}$ となる。

${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

a_kとa_{k+1}の大小を比較していく。

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{{}_{80}C_{79-k}\cdot 5^{79-k}}{{}_{80}C_{80-k}\cdot 5^{80-k}} = \frac{\frac{80!}{(79-k)!\{80-(79-k)\}!}\cdot 1}{\frac{80!}{(80-k)!\{80-(80-k)\}!}\cdot 5}$$

$$\frac{(80-k)(79-k)(78-k)\cdots 1}{(79-k)(78-k)\cdots 1}$$

$$= \frac{(80-k)!\ \ k!}{(79-k)!\,(1+k)!}\times\frac{1}{5} = \frac{80-k}{5(1+k)}$$

$\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$ のとき、$\frac{80-k}{5(1+k)} > 1$　両辺に $5(1+k) > 0$ をかけて、

$80-k > 5(1+k)$　これを解いて $k < \frac{75}{6} = 12.5$

つまり、$k \leqq 12$ のとき $a_k < a_{k+1}$ ― ①

$\frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ のとき、同様に解くと、$k > 12.5$　つまり $k \geqq 13$ のとき $a_k > a_{k+1}$ ― ②

①から $k=12$で $a_{12} < a_{12+1} = a_{13}$

①, ②より

$$a_1 < a_2 \cdots < a_{12} < a_{13},\ a_{13} > a_{14} > \cdots > a_{80}$$

②から $k=13$で $a_{13} > a_{13+1} = a_{14}$

よって、xの13乗の係数が最大になる。