

数学II

EX.4

$n \geq 2$ のとき、 $(1 + \frac{1}{n})^n > 2$ を示す。

n 乗の展開... 二項定理の利用

$$\begin{aligned} (1 + \frac{1}{n})^n &= \underbrace{{}_n C_0}_{1} + \underbrace{{}_n C_1}_{n \times \frac{1}{n}} (\frac{1}{n})^1 + {}_n C_2 (\frac{1}{n})^2 + \dots + {}_n C_n (\frac{1}{n})^n \\ &= 1 + 1 + {}_n C_2 (\frac{1}{n})^2 + \dots + {}_n C_n (\frac{1}{n})^n \\ &= 2 + {}_n C_2 (\frac{1}{n})^2 + \dots + {}_n C_n (\frac{1}{n})^n \end{aligned}$$

よって $n \geq 2$ かつ

$${}_n C_2 (\frac{1}{n})^2 + \dots + {}_n C_n (\frac{1}{n})^n > 0$$

(それぞれ「+」の項が「+」でそれぞれを足し合わせているため)

よって、

$$\begin{aligned} (1 + \frac{1}{n})^n &= 2 + \underbrace{{}_n C_2 (\frac{1}{n})^2 + \dots + {}_n C_n (\frac{1}{n})^n}_{\text{上記の理由より } (+)} \\ &> 2 \end{aligned}$$

$$(1 + \frac{1}{n})^n > 2 \quad \text{が示された。}$$