数学II

Ex.19

(3)

絶対値の2乗の扱いに注意

$$|a+b|^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(|a|+|b|)^2=a^2+2|a||b|+b^2$$

(2)と同様に、絶対値が出てくると2乗を考えることが多いです。

$$\text{左辺}^2-\text{右辺}^2=\left|\frac{a}{b}\sqrt{a}-\frac{b}{a}\sqrt{b}\right|^2-|\sqrt{a}-\sqrt{b}|^2=\frac{a^2}{b^2}a-2\sqrt{ab}+\frac{b^2}{a^2}b-(a-2\sqrt{ab}+b)$$

$$=a\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right)+b\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)=\frac{a^2-b^2}{b^2}a+\frac{b^2-a^2}{a^2}b=\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}a^3-\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}b^3$$

通分

後ろの分数：$\frac{b^2-a^2}{a^2}b=-\frac{a^2-b^2}{a^2}b$

$$=\frac{(a^2-b^2)(a^3-b^3)}{a^2b^2}=\frac{(a+b)(a-b)(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^2b^2}=\frac{(a+b)(a-b)^2(a^2+ab+b^2)}{a^2b^2}\geqq 0$$

分母 $a^2b^2>0$

分子 $a>0,\ b>0$ より $a+b>0,\ a^2+ab+b^2>0$, $(a-b)^2\geqq 0$ より

$\frac{\text{分子}\geqq 0}{\text{分母}>0}\geqq 0$

ここで、$\left|\frac{a}{b}\sqrt{a}-\frac{b}{a}\sqrt{b}\right|\geqq 0,\ |\sqrt{a}-\sqrt{b}|\geqq 0$ より

$\left|\frac{a}{b}\sqrt{a}-\frac{b}{a}\sqrt{b}\right|^2\geqq|\sqrt{a}-\sqrt{b}|^2$ から $\left|\frac{a}{b}\sqrt{a}-\frac{b}{a}\sqrt{b}\right|\geqq|\sqrt{a}-\sqrt{b}|$ が示された。

等号が成立するのは

$\frac{(a+b)(a-b)^2(a^2+ab+b^2)}{a^2b^2}=0$ のとき、つまり $a=b$ のときである。