数学II

Ex. 19

(1) $3(a^2+b^2+c^2) \geqq (a+b+c)^2$ を示す。 $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$$\text{左辺} - \text{右辺} = (3a^2+3b^2+3c^2) - (a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)$$

$$= 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca = a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2$$

$$= (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqq 0$$

正を示すために2乗を利用しています。2乗を作る目標を持って変形していってください。

よって、$3(a^2+b^2+c^2) \geqq (a+b+c)^2$ が示された。

等号が成立するのは、$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$ のとき、つまり $a=b=c$ のときである。 //

(2) $A \geqq 0$ かつ $B \geqq 0$ のとき、$A^2 \geqq B^2 \Leftrightarrow A \geqq B$ が成立する。

A, Bのどちらかが負であると成立しない。

$\sqrt{\ }$ が入った状態であると、変形が難しくなるので、2乗を利用する。

$$\text{左辺}^2 - \text{右辺}^2 = \left(\sqrt{\frac{a+b+c}{3}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3}\right)^2 = \frac{a+b+c}{3} - \frac{a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ca}}{9}$$

$$= \frac{2a+2b+2c-2\sqrt{ab}-2\sqrt{bc}-2\sqrt{ca}}{9} = \frac{(a-2\sqrt{ab}+b)+(b-2\sqrt{bc}+c)+(c-2\sqrt{ca}+a)}{9} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2+(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2}{9} \geqq 0$$

よって、$\left(\sqrt{\frac{a+b+c}{3}}\right)^2 \geqq \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3}\right)^2$ が示された。

ここで、$\sqrt{\frac{a+b+c}{3}} > 0$ かつ $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3} > 0$ であるので、

この確認は解答上では必ず必要です。($A \geqq 0, B \geqq 0$ のとき $A^2 \geqq B^2 \Leftrightarrow A \geqq B$ を利用するため)

$\sqrt{\frac{a+b+c}{3}} \geqq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3}$ が示された。

等号が成立するのは、$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2+(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2}{9}=0$ のとき、つまり $a=b=c$ のときである。 //