数学II

EX.18

不等式の証明の問題です。不等式の証明では以下のようなパターンが考えられます。

不等式の証明（$A > B$ を示す）

① $A - B > 0$ を示す。（正を示すために2乗や因数分解を利用する）

② 相加平均・相乗平均を利用する。（$a>0,\ b>0$ のとき $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$）

③ $f(x) = A - B$ とおいて、$f(x)$ の最小値 > 0 を示す。（微分法の利用）

④ 平均値の定理を利用する。（数III青チャート 例172、未学習の範囲）

今回の問題は①を利用します。$-1 < \dfrac{ab+1}{a+b} < 1$ を示すため、

(i) $-1 < \dfrac{ab+1}{a+b}$ ，(ii) $\dfrac{ab+1}{a+b} < 1$ を示していく。

まず与えられた条件より、$|a|<1$ から $-1<a<1$

$-1<a$ の両辺に b を足すと $b-1 < a+b$ となる。

これは $1<b$ より $0 < b-1 < a+b$ となるため、$\boxed{0 < a+b}$ …(ア)

(i) を示す。（右－左 > 0 を示す）

$$\frac{ab+1}{a+b} - (-1) = \frac{ab+1+a+b}{a+b} = \frac{(a+1)(b+1)}{a+b} > 0$$

$+1 = +\dfrac{a+b}{a+b}$

分子 $a>-1$ より $a+1>0$ かつ $b+1>0$ より $(a+1)(b+1)>0$

分母 (ア)より $a+b>0$

よって

$$-1 < \frac{ab+1}{a+b}$$

(ii) を示す。（右－左 >0 を示す）

$$1 - \frac{ab+1}{a+b} = \frac{a+b-ab-1}{a+b} = \frac{(a-1)(1-b)}{a+b} > 0$$

分子 $a<1$ より $a-1<0$ かつ $1-b<0$ より $(a-1)(1-b)>0$

分母 (ア)より $a+b>0$

よって $\dfrac{ab+1}{a+b} < 1$

(i), (ii) より

$$-1 < \frac{ab+1}{a+b} < 1$$

が示された。