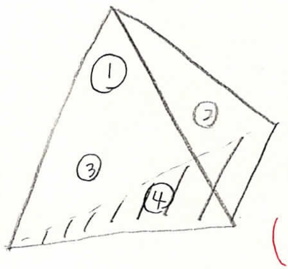
数学A
Ex.16

自分で演習をする際は実際に正四面体を作成してみるのも良いと思います。

立体に色を塗るなどの順列の問題は平面に比べてかなり難易度が上がる。想像力を働かせながら図を描くなどして考えていって欲しいです。
ただ、回転させた際に一致するものも多いため、場合の数としては少なくなる。
計算ではどうも方法が分からない場合は数え上げるのも1つだと思います。

(1) 立体の面のうち1つを固定して考えるは平面と同様に定番です。

4色すべて使う場合(例えば 赤,青,黄,黒)
底面に黒を塗ったとする。残りの赤,青,黄の3色を側面に塗っていく。手前を① 右を②，左を③とすると、
①赤 ②青 ③黄，①赤 ②黄 ③青 の2通りである。



(3色を側面に塗る場合，回転さして一致するものは同じとみなすため，3色の円順列($3!\div3=2$)となる。)

ここで底面の黒を違う色に塗り変えたとしても、すべて回転させれば一致するので、
求める場合の数は 2通り

(2) 3色すべて使う場合(例えば，赤,青,黄)
4面あるので、3色のうち1色は2面に塗る必要がある。
(1)の正四面体(上の①~④をつけたもの)で考えると、例えば①と②が同じ色で③,④を残り2色で塗ることと②と④が同じ色で①,③を残り2色で塗ることは同値である。(回転させれば一致する。)
これはどの2面を選んで1つの色を塗り残り2面を他の2色で塗ったとしてもすべて一致する、ということである。よって、3色のうちどの色を2面に塗るかだけで、3通り

3色のうち1色選ぶ ${}_3C_1=3$

3色のうち使われないものがあって良い場合
(i) 1色のみで塗る場合
3色のうちどの色で塗るかを選ぶ ${}_3C_1 = 3$通り
(ii) 2色のみで塗る場合
(ア) 2面ずつ塗るとき
4面中どの2面を選んでも回転させれば一致するので、色の選び方のみ つまり ${}_3C_2 = 3$通り
(イ) 3面と1面に塗るとき
色の選び方 ${}_3C_2$ とどちらを3面塗るかの2通り つまり ${}_3C_2\times 2 = 6$通り

3色，2色，1色の塗り方全てを足して、$3+3+(3+6) = 15$通り