+α

厳密には $\log|y| = \log|x-1| + \log|x+3|^3 - \log|x+4|^4$ とした時点で真数条件より $x \neq 1, -3, -4$ です。よって $y' = \dfrac{12(x+3)^2}{(x+2)^5}$ —①

ところが元の関数 $y = \dfrac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^4}$ では $x=1, -3, -4$ でも微分係数が存在するので①の範囲を拡張する必要があります。しかし今はこの議論には立ち入らず計算法としてマスターすることを優先します。

+α

$\log|y| = \log|x-1| + \log|x+3|^3 - \log|x+4|^4$ と絶対値をとりましたが真数を1つずつ見ると $|x+4|^4$ は $(x+4)^4$ としても必ず正となります。このように必ず正の数になるような真数ならば $\log(x+4)^4$ のように絶対値をつける必要はありません。

このように対数を用いて微分する方法を対数微分法といいます。

例 次の関数を微分せよ $\boxed{\text{チャート例150}}$

(1) $y = \left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2$ (2) $y = \sqrt[3]{\dfrac{(x+2)^4}{x^2(x^2+1)}}$ (3) $y = x^x$ ($x>0$とする)

(1) 両辺の絶対値の対数をとり

$$\log|y| = 2(\log|x^2-1| - \log(x^2+1))$$ $\boxed{x^2+1>0\text{より絶対値は不要}}$

両辺をxで微分し

$$\frac{y'}{y} = 2\left(\frac{2x}{x^2-1} - \frac{2x}{x^2+1}\right) = 2\,\frac{4x}{(x^2-1)(x^2+1)}$$ より

$$y' = \frac{8x}{(x^2-1)(x^2+1)}\cdot\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2 = \frac{8x(x^2-1)}{(x^2+1)^3} = \frac{8x(x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

(2) (1)と同様に $\log|y| = \dfrac{1}{3}\{4\log|x+2| - 2\log|x| - \log(x^2+1)\}$ $\boxed{\sqrt[3]{(x+2)^4} = (x+2)\sqrt[3]{x+2}}$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\left\{\frac{4}{x+2} - \frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+1}\right\}$$

よって $$y' = \frac{1}{3}\cdot\frac{-2(4x^2-x+2)}{(x+2)\cdot x\cdot(x^2+1)}\cdot\sqrt[3]{\frac{(x+2)^4}{x^2(x^2+1)}} = -\frac{2(4x^2-x+2)}{3x(x^2+1)}\cdot\sqrt[3]{\frac{x+2}{x^2(x^2+1)}}$$

(3) $y' = x(x)^{x-1}$ とはなりません。$y = x^p$ ($p$は有理数(実数))のとき $y' = px^{p-1}$ でした。

「$y = (x\text{の式})^{x\text{の式}}$ は対数微分法」は鉄則です。覚えておきましょう。

<解> 対数をとり $\log y = x\log x$ $\boxed{x>0\text{なので絶対値不要}}$

両辺をxで微分し $\dfrac{y'}{y} = \log x + x\cdot\dfrac{1}{x} = \log x + 1$

よって $y' = (\log x + 1)\cdot x^x$