では、合成関数の微分法についての説明をしていきます。
少し難しいので、十分に理解できなくても、ひとまず公式を使えればOKです。

① $y=\{f(x)\}^n$ について $y'=n\{f(x)\}^{n-1}\cdot f'(x)$ となることの説明

まず、$y=\{f(x)\}^3$ について、$y=f(x)\cdot f(x)\cdot f(x)$ なので

積の導関数により、$y'=f'(x)\cdot f(x)\cdot f(x)+f(x)\cdot f'(x)\cdot f(x)+f(x)\cdot f(x)\cdot f'(x)$

$=3\{f(x)\}^2\cdot f'(x)$ となります。

同様に $y=\{f(x)\}^n$ を考えます。

$y=f(x)\cdot f(x)\cdot f(x)\cdots\cdots f(x)$ ← f(x)がn個

$=\underbrace{f'(x)\cdot f(x)\cdots f(x)}+\underbrace{f(x)\cdot f'(x)\cdot f(x)\cdots\cdots}+\cdots$

{f'(x)が1個、f(x)がn−1個}がn個

$=n\cdot\{f(x)\}^{n-1}\cdot f'(x)$ となります。

これを用いると $y=\sin^3 x$ について

$y'=3(\sin x)^2\cdot(\sin x)'$

$=3\sin^2 x\cdot\cos x$ と計算できます。

+α 積の導関数についての+α

$\{f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)\}'$

$=[\{f(x)\cdot g(x)\}\cdot h(x)]'$

$=\{f(x)\cdot g(x)\}'h(x)+\{f(x)\cdot g(x)\}\cdot h'(x)$

$=\{f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)\}h(x)+f(x)g(x)h'(x)$

$=f'(x)g(x)h(x)+f(x)\cdot g'(x)h(x)+f(x)\cdot g(x)h'(x)$

f(x), g(x), h(x)のうち、1つだけ微分

4つ以上の積の導関数でも同じ性質が成り立ちます

② $\{f(g(x))\}'=f'(g(x))\cdot g'(x)$ の証明

導関数の定義に従って導きます。

$$\{f(g(x))\}'=\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

③ 形式的な説明

y'ダッシュ又はyプライム

ディーワイ ディーエックスと読む

微分記号として、y'（yを微分）、$\frac{dy}{dx}$（yをxで微分）の2つが出てきました。

$\frac{dy}{dx}$ は一つの記号であり、分数ではないが、分数のような性質があることが分かっています。

教科書P158では、この性質を用いて合成関数の微分を説明しています。

$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}}$ まるで、duで約分しているかのようです。

これを用いると $y=\sin^3 x$ の微分は次のようになります。

uはsinxです

$u=\sin x$ とすると、$y=u^3$ となり、$\frac{dy}{du}=3u^2=3\sin^2 x$

また $\frac{du}{dx}=\cos x$

したがって $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=3\sin^2 x\cdot\cos x$

いろいろと説明してきましたが、$\{f(x\text{の式})\}'=f'(x\text{の式})\cdot\underbrace{(x\text{の式})'}_{\text{中身の微分}}$ を押さえましょう。