数学II

Ex. 15

条件が与えられたときの等式の証明です。等式の証明には以下のパターンがあります。

(i) 条件が与えられていない等式の証明（A=Bを示す）

① A (or B) を変形してもう一方の形にする。

② A, B共に変形して同じ形にする。

③ A−B=0 (or B−A=0) を示す。

Ex.15は(ii)の①のパターンです。

(ii) 条件が与えられた等式の証明

① 与えられた条件から文字を減らすことを目的に証明すべき等式に代入する。

② (①の特別な形) 比例式が与えられた場合 (比例式)=k と置いて代入する。

Ex.16は(ii)の②のパターンです。

等式の証明が出題されたときは、これらの方法で解くことができないか考えてみましょう。

今回は上記(ii)の①の方法で解き進めていきます。

$a+b+c=0$ から1つの文字に着目して、例えば $a=-b-c$ として代入しても

証明できますが、少し工夫をしてみましょう。

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+3$$

$$=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}+3=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}+3=0$$

条件より $a+b=-c$, $b+c=-a$, $c+a=-b$ を代入

これより $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3=0$ が示された。//

注 証明の解答を書く際に、証明すべきこと（今回では、$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3=0$）から証明を始めてしまうものをよく見ます。

これは今から証明すべきものであり、まだ成り立っているか分からない式です。

それを解答中に書いてしまうのはやめましょう。

もちろん「$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3=0$ を示す」などは問題ありません。