(ii) 商の導関数

$y=\dfrac{2x+1}{x^2}$ の微分はどうなるでしょうか？

結論から言うと $y'=\dfrac{(2x+1)'\cdot x^2-(2x+1)\cdot(x^2)'}{(x^2)^2}$

$$=\frac{2x^2-(2x+1)\cdot 2x}{x^4}$$

$$=\frac{-2x^2-2x}{x^4}$$

$$=-\frac{2(x+1)}{x^3}$$

となります。まとめると、次のようになります。

商の導関数の公式

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'=-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$f(x)=1$のとき、$f'(x)=0$ですね

↓つまり

$$\left\{\frac{\boxed{上}}{下}\right\}'=\frac{\boxed{上}'\times 下-\boxed{上}\times 下'}{下^2}$$

$$\left\{\frac{1}{下}\right\}'=-\frac{下'}{下^2}$$

この公式も、使いこなせるようにしましょう。
では証明してみます。

{ }内を通分

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\left\{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{f(x+h)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x+h)}{g(x+h)\cdot g(x)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)\cdot g(x)}\cdot\frac{\{f(x+h)-f(x)\}\cdot g(x)+f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x+h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)\cdot g(x)}\cdot\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x)-\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot f(x)\right\}$$

$h\to 0$のとき、$g(x+h)\to g(x)$

$$=\frac{1}{g(x)\cdot g(x)}\cdot\{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)\}=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}'$については、上の式について、$f(x)=1$とすると、$f'(x)=0$なので

$$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'=\frac{0\cdot g(x)-1\cdot g'(x)}{\{g(x)\}^2}=\frac{-g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

となります。

教科書のP154は先に$\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}'$を求めてから積の導関数を用いるという方法をとっています。では問題を解きましょう。

練習　次の関数を微分せよ。

(1) $y=\dfrac{2x+3}{x^2+1}$　(2) $y=\dfrac{1}{x^2}$　(3) $y=\dfrac{x(x+1)}{x^2+1}$