5、積・商・合成関数・逆関数の導関数

(1) 積の導関数

前ページの(1) $y=e^x\cdot\sin x$ の微分はどうなるでしょうか？

結論から言うと $y'=(e^x)'\sin x+e^x(\sin x)'$

$=e^x\cdot\sin x+e^x\cos x$

$=e^x(\sin x+\cos x)$ となります。

もちろん合成をして
$y'=e^x\cdot\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$
$=\sqrt{2}\,e^x\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$
としてもOKです。

積の導関数の公式

まとめると、次のようになります。

$$\boxed{\{f(x)\cdot g(x)\}'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)} \quad ―①$$

つまり

$$\boxed{\{x\text{の式}\times\boxed{x\text{の式}}\}'=前'\times\boxed{後}+前\times\boxed{後}'} \quad ―①'$$

では、証明しましょう。($f(x)$ と $g(x)$ は微分可能とします。)

$\{\quad\}$ の中が $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ となるよう変形

$$\{f(x)\cdot g(x)\}'=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}\cdot g(x+h)+f(x)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}$$

$f(x)$でくくった

$$=\lim_{h\to0}\left\{\underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{f'(x)}\cdot g(x+h)+\underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{g'(x)}\cdot f(x)\right\}$$

ここで、$h\to0$ のとき、$g(x+h)\to g(x)$ なので

$$\{f(x)\cdot g(x)\}'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

では、練習していきましょう。公式①(または①')を使いこなしましょう。

練習、次の関数を微分せよ

(i) $y=(2x+1)(x^2-x+3)$ (ii) $y=x\sin x+\cos x$ (iii) $y=x\cdot2^x$

(i) $y'=(2x+1)'(x^2-x+3)+(2x+1)(x^2-x+3)'$

$=2(x^2-x+3)+(2x+1)\cdot(2x-1)$

$=6x^2-2x+5$

(ii) $y'=(x'\sin x+x(\sin x)')+(\cos x)'$

$=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$

(iii) $y'=(x)'\cdot2^x+x\cdot(2^x)'$

$=2^x+x\cdot2^x\cdot\log2$

$=2^x(1+x\log2)$

(i)は $y=2x^3-x^2+5x+3$ と展開してから微分し $y'=6x^2-2x+5$ としてもよいですが (ii)、(iii)は同じようにはいきません。しっかりと公式をマスターしましょう